Formalisme, Logique élémentaire, Ensembles

M2 – Chapitre 1

I. Implication

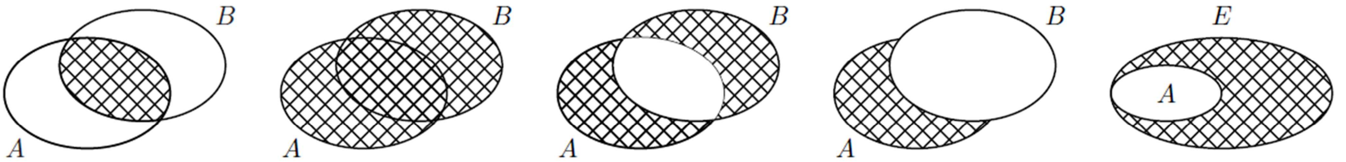
$$\boxed{A \Rightarrow B = \bar{A} \text{ ou } B}$$

II. Ensembles

1. Partie d'un ensemble

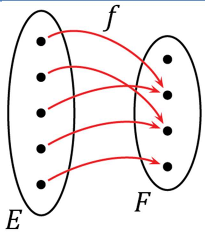
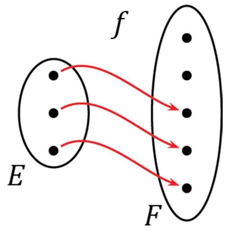
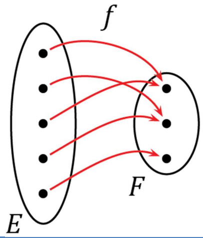
$$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

2. Opérations sur les ensembles



$A \cap B$ | $A \cup B$ | $A \Delta B$ | $A \backslash B$ | A^c (dans E)

3. Applications

Application	Injective	Surjective
		
Une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F	f est injective si : $\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ $\forall (x,y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$	f surjective si : $\forall y \in F, \exists\, x \in E, f(x) = y$

4. Cardinal d'un ensemble

Card E = nombre d'éléments de E

- Il existe f **injective** de E dans F $\Leftrightarrow$ Card $E \leq$ Card F
- Il existe f **surjective** de E dans F $\Leftrightarrow$ Card $E \geq$ Card F
- Il existe f **bijective** de E dans F $\Leftrightarrow$ Card $E =$ Card F

5. Relation d'équivalence

Définition	Propriétés possibles	Classes et ensemble q.
R : $\begin{array}{ccc} E^2 & \rightarrow & \{V,F\} \\ (x,y) & \rightarrow & xRy \end{array}$	• Réflexive : xRx • Symétrique : $xRy \Rightarrow yRx$ • Transitive : xRy et $yRz \Rightarrow xRz$	$\bar{x} = \{x' \in E \mid xRx'\}$ Eléments en relation avec x $E/_R = \{\bar{x} \mid x \in E\}$

R est une relation. Si elle respecte les 3 propriétés, c'est une relation d'équivalence.

Formalisme, Logique élémentaire, Ensembles

M2 – Chapitre 1

III. Structures algébriques

1. Lois de composition interne

Définition	Propriétés possibles
$* : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & E \\ (x,y) & \to & x*y \end{array}$	• Associative : $(x*y)*z = x*(y*z) = x*y*z$ • Commutative : $x*y = y*x$ • Possède e neutre : $e*x = x*e = x$ • Tout x a un symétrique x' : $x*x' = e$

2. Groupe

Définition
$(E, \ *)$ est un groupe si $*$ est **associative**, $*$ possède un **neutre** et tout élément de E a un **symétrique** par $*$.

3. Sous-groupe

Définition	Théorème
Soit $(G, \ *)$ un groupe et $H \subset G$, Si $(H, \ *)$ est un groupe, Alors $(H, \ *)$ est un sous-groupe de $(G, \ *)$	Soit $(G, \ *)$ un groupe et $H \subset G$, Si $\forall (h,h') \in H^2, h * h'^{-1} \in H$ Alors $(H, \ *)$ est un sous-groupe de $(G, \ *)$

4. Groupe engendré par une partie A

Définition
Soit $(G, \ *)$ un groupe et $A \subset G$, Alors $gr(A)$ = groupe engendré par A = plus petit sous-groupe de G contenant A

5. Anneau et corps

Anneau	Corps
Soit $(A,+)$ un groupe commutatif, Soit $\cdot$ une l.c.i. associative sur A, Si $\cdot$ possède un neutre 1_A, Et $\cdot$ distributive par rapport à $+$, Alors $(A,+, \ \cdot)$ est un anneau	Si $(A,+, \ \cdot)$ est un anneau, Et $(A \setminus \{0_A\}, \ \cdot)$ est un groupe, Alors $(A,+, \ \cdot)$ est un corps

6. Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$

- $n\mathbb{Z} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ = multiples de n
- Soient H et H' des sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$, $H + H' = \{h + h' \mid (h,h') \in H \times H'\}$
- $\boxed{gr(\{n\}) = n\mathbb{Z}}$
- $gr(\{a,b\}) = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$
- H sous-groupe de $(\mathbb{Z},+), \exists!\, n \in \mathbb{N}, H = gr(\{n\}) = n\mathbb{Z}$
- $n\mathbb{Z} = n'\mathbb{Z} \Leftrightarrow n = n'$
- Soit $n = a \wedge b$, $\boxed{(a+b)\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}}$

Théorème de Bezout :

$$(a,b) \in \mathbb{Z}^2, \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, \boxed{au + bv = a \wedge b}$$

$$\boxed{a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1}$$